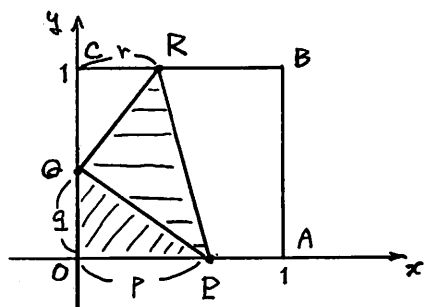


第1問



$$(1) \quad 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1, 0 < r \leq 1 \quad \text{--- ①}$$

面積を

$$S(\triangle OPQ) = \frac{1}{2} pq \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{1}{2} pq = \frac{1}{3}$$

$p \neq 0$ より

$$q = \frac{2}{3p} \quad \text{--- ③}$$

$$S(\square OABC) = 1 \quad \text{より}$$

$$S(\triangle OPQ) + S(\triangle PQR) + S(\triangle CQR) + S(\square ABPR) = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1-q)r + \frac{1}{2} (1-p+1-r) \cdot 1 = 1$$

$$\frac{1}{2} (r - qr + 2 - p - r) = \frac{1}{3}$$

$$-p - qr = -\frac{4}{3}$$

$$p + qr = \frac{4}{3}$$

$$p + \frac{2}{3p} r = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3p} r = \frac{4}{3} - p$$

$$r = 2p - \frac{3}{2} p^2 \quad \text{--- ④}$$

①, ② より

$$0 < \frac{2}{3p} \leq 1.$$

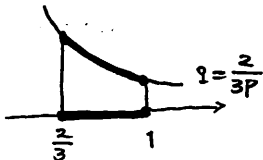
$$2 \leq 3p$$

$$\text{よって } p \geq \frac{2}{3}$$

① とあわせて

$$\frac{2}{3} \leq p \leq 1.$$

面積を



よって

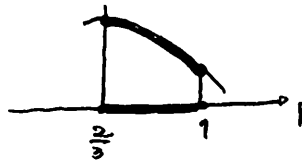
$$\frac{2}{3} \leq q \leq 1$$

② (2) より

$$r = 2p - \frac{3}{2} p^2$$

$$= -\frac{3}{2} \left\{ p^2 - \frac{4}{3} p \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} \left(p - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}$$



よって

$$\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3}$$

7) より

$$q = \frac{2}{3p}, r = -\frac{3}{2} p^2 + 2p$$

$$\frac{2}{3} \leq p \leq 1, \frac{2}{3} \leq q \leq 1, \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{2}{3}$$

(2)

$$\frac{CR}{OA} = \frac{r}{q}$$

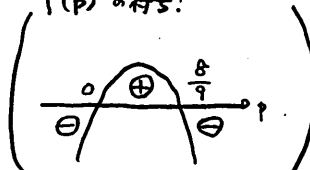
$$= \frac{-\frac{3}{2} p^2 + 2p}{\frac{2}{3p}}$$

$$= -\frac{9}{4} p^3 + 3p^2 = f(p) \quad \text{と置く}$$

$$f'(p) = -\frac{27}{4} p^2 + 6p$$

$$= -\frac{27}{4} p \left(p - \frac{8}{9} \right)$$

$f'(p)$ の符号!



p	$\frac{2}{3} \dots \frac{8}{9} \dots 1$
$f'(p)$	$+ \quad 0 \quad -$
$f(p)$	$\frac{2}{3} \nearrow \frac{64}{81} \searrow \frac{3}{4}$

よって

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} = \frac{64}{81} \quad (p = \frac{8}{9}) \\ \text{min} = \frac{2}{3} \quad (p = \frac{2}{3}) \end{array} \right.$$

第2問

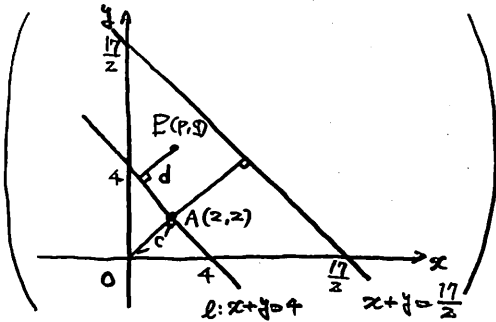
(1) $\vec{OA} = (2, 2), \vec{OP} = (p, q)$

条件1 より

$$8 \leq \vec{OA} \cdot \vec{OP} \leq 17.$$

$$8 \leq 2p + 2q \leq 17$$

$$\text{すなわち } 4 \leq p + q \leq \frac{17}{2} \quad \text{--- ①}$$



$$c = 2\sqrt{2}$$

点 $P(p, q)$ は直線 $l: x + y - 4 = 0$

と距離 d は

$$d = \frac{|p + q - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{p + q - 4}{\sqrt{2}} \quad (\text{① ① より})$$

条件2 より

$$cd \geq (p-1)^2$$

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{p + q - 4}{\sqrt{2}} \geq (p-1)^2$$

$$2p + 2q - 8 \geq p^2 - 2p + 1.$$

$$2q \geq p^2 - 4p + 9$$

$$q \geq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2} \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$P(p, q)$ は

$$4 \leq x + y \leq \frac{17}{2} \quad \text{かつ} \quad y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$$

を満足している.

$$y = -x + 4 \quad \text{と} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \quad \text{を連立して}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} = -x + 4$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{よって} \quad y = 3$$

$$y = -x + \frac{17}{2} \quad \text{と} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \quad \text{を連立して}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} = -x + \frac{17}{2}$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

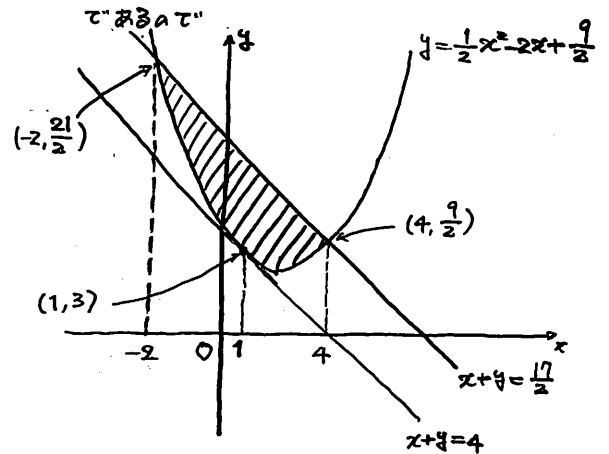
$$x = 4, -2.$$

$$\text{すなわち 交点 } (4, \frac{9}{2}), (-2, \frac{21}{2})$$

また

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{5}{2}$$



領域 D は図の斜線部

ただし、境界を含む

領域 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^4 \left\{ (-x + \frac{17}{2}) - (\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{6}(4+2)^3 \right\} \\ &= \underline{\underline{18}} \end{aligned}$$

(2) 原点を通る傾き m の直線 $y = mx$

$$\text{と } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} \quad \text{を連立して}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2} = mx$$

$$x^2 + (-2m-4)x + 9 = 0 \quad \text{--- ③}$$

判別式 $D = 0$ とおき

$$\frac{D}{4} = (m+2)^2 - 9$$

$$= (m+5)(m-1) = 0$$

$$m = -5, 1$$

$m = -5$ のとき ③ は

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$x = -3.$$

$m = 1$ のとき ③ は

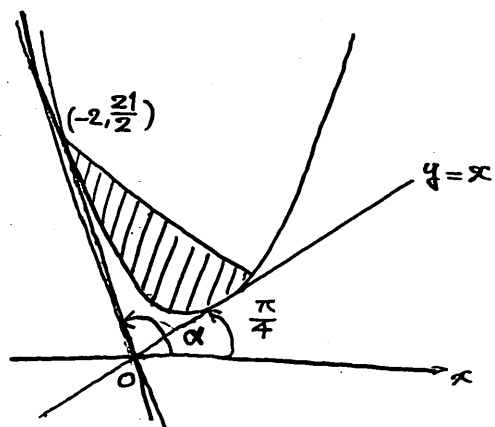
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3.$$

すなわち

$$\text{接点 } (-3, 15), (3, 3)$$



x 軸上 α 点 B(1, 0),

D 上 α 点 C(-2, 2/2) 点 B 点.

$$\begin{cases} |\vec{OB}| = 1 \\ |\vec{OC}| = \sqrt{4 + \frac{441}{4}} = \frac{\sqrt{457}}{2} \\ \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -2 \end{cases}$$

よ、

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = |\vec{OB}| |\vec{OC}| \cos \alpha$$

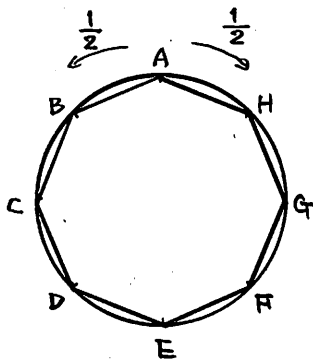
$$-2 = 1 \cdot \frac{\sqrt{457}}{2} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{457}}$$

よ、

$$\underline{\underline{-\frac{4}{\sqrt{457}} \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

第3問



(1)

(表, 裏) = (9, 1), (5, 5), (1, 9)

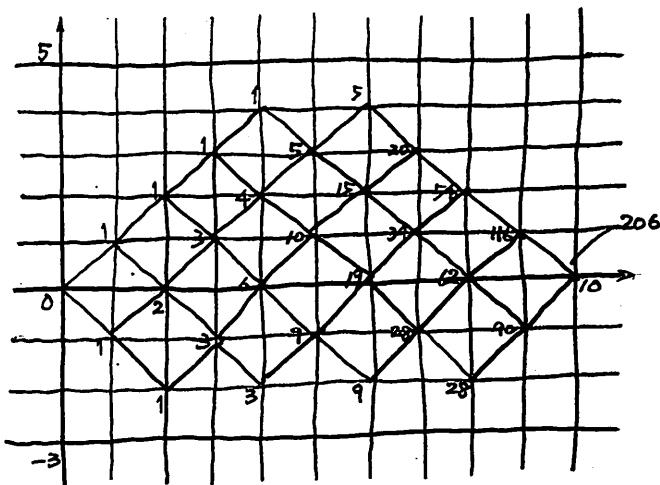
となるよく.

求める確率は

$$\begin{aligned}
 & {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 {}_1C_1 \left(\frac{1}{2}\right) + {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 {}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
 & + {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 {}_9C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \\
 & = ({}_{10}C_9 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\
 & = (10 + 252 + 10) \times \frac{1}{1024} \\
 & = \frac{272}{1024} \\
 & = \frac{17}{64}
 \end{aligned}$$

(2)

事象 S から事象 $\overline{T}$ となる確率を調べる.



その確率は

$$\frac{206}{2^{10}} = \frac{206}{1024}$$

よて, 求める確率は

$$\frac{272}{1024} - \frac{206}{1024} = \frac{66}{1024} = \frac{33}{512}$$

第4問

(1)

$$f(x, y) = |x| + |y| - 1$$

とおく

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y) \quad \text{より}$$

x 軸, y 軸に関して対称であるので

$x \geq 0, y \geq 0$ で調べる

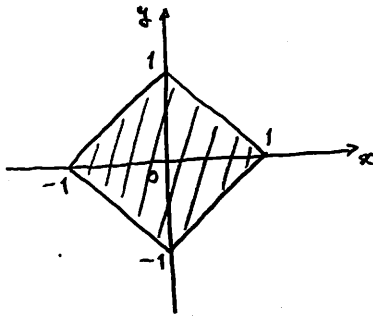
このとき

$$|x| + |y| \leq 1 \quad \text{より}$$

$$x + y \leq 1$$

$$\text{よって } y \leq -x + 1 \quad \text{かつ } x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0$$

対称性に注意して.



領域 D は図の斜線部
ただし、境界を含む。

点 Q の原点に関する対称点 Q' とし

$$\vec{OQ'} = -\vec{OQ} \quad \text{を満たす。}$$

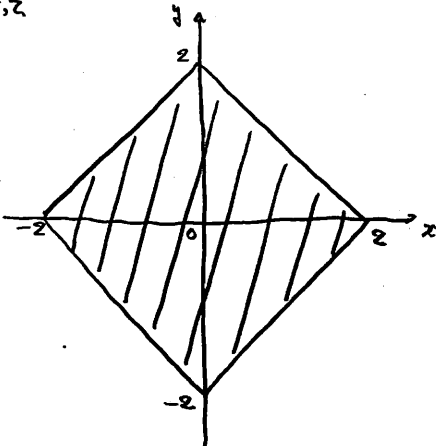
このとき

$$\vec{OR} = \vec{OP} - \vec{OQ}$$

$$= \vec{OP} + \vec{OQ'}$$

であり、2点 P, Q は独立に同じ領域 D 内を動きまわる。

よって



領域 E は図の斜線部
ただし、境界を含む。

(2) (証明)

$A(a, a)$ とおく

領域 F は領域 D を $\vec{OA}$ だけ平行移動した領域である。

このとき

$$\begin{cases} \vec{OS} = \vec{OP} + \vec{OA} \\ \vec{OT} = \vec{OQ} + \vec{OA} \end{cases}$$

としても、一般性を失わない。

$$\vec{ST} = \vec{OS} - \vec{OT}$$

$$= (\vec{OP} + \vec{OA}) - (\vec{OQ} + \vec{OA})$$

$$= \vec{OP} - \vec{OQ}$$

$$= \vec{OR}$$

よって

G と E は一致する。 ■