第1問

$$(\text{与式}) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \right) dx$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot (x^2)' \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

$$\left(\begin{array}{ll} x = \tan\theta \quad \text{とおくと} & \\ dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} & \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline \theta & 0 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \end{array} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3\theta}{\cancel{(1+\tan^2\theta)}\sqrt{1+\tan^2\theta}} \cdot \frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \right) \sin\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ (\cos\theta)^{-2} (\cos\theta)' \cdot (-1) - \sin\theta \right\} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (1+1)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} \times \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

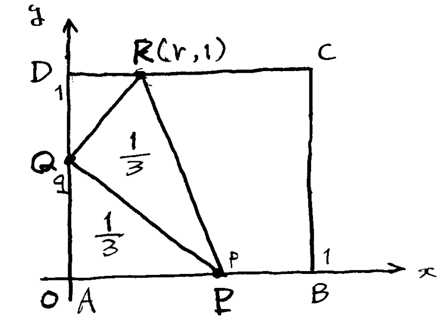
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

よって

$$(\text{与式}) = \frac{1}{3} + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \right) + (\sqrt{2} - 1) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{8} + \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{35}{12}}}$$

第2問



A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)

P(p,0), Q(0,q), R(r,1)

$(0<p\leqq 1,\ 0<q<1,\ 0<r<1)$

とおく。

$\dfrac{DR}{AQ}=\dfrac{r}{q}$

$S(\triangle APQ)=\dfrac{1}{3}$ より

$\dfrac{1}{2}pq=\dfrac{1}{3}$

$pq=\dfrac{2}{3}$ ——— ①

$S(\triangle DQR)=\dfrac{1}{2}(1-q)r$

であり

$S(\square PBCR)=S(\square ABCD)-S(\triangle APQ)-S(\triangle PQR)-S(\triangle DQR)$

より

$\dfrac{1}{2}\times(1-p+1-r)\times 1=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}(1-q)r$

$\cancel{2}-p-\cancel{r}=\cancel{2}-\dfrac{4}{3}-\cancel{r}+qr$

$p+qr=\dfrac{4}{3}$ ——— ②

ここで ① より

$p=\dfrac{2}{3q}$

$0<p\leqq 1$ より

$0<\dfrac{2}{3q}\leqq 1$

$0<2\leqq 3q$

$q\geqq\dfrac{2}{3}$

$0<q<1$ より

$\dfrac{2}{3}\leqq q<1$

② より

$\dfrac{2}{3q}+qr=\dfrac{4}{3}$

$qr=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3q}$

$qr=\dfrac{4q-2}{3q}$

よって

$\dfrac{r}{q}=\dfrac{4q-2}{3q^3}=f(q)$

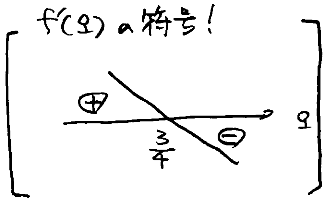
とおくと

$f'(q)=\dfrac{4\times 3q^3-(4q-2)\times 9q^2}{9q^6}$

$=\dfrac{4q-12q+6}{3q^4}$

$=\dfrac{-8q+6}{3q^4}$

$f'(q)$ の符号!



q	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	(1)
$f'(q)$		$+$	0	$-$	
$f(q)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$(\frac{2}{3})$

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

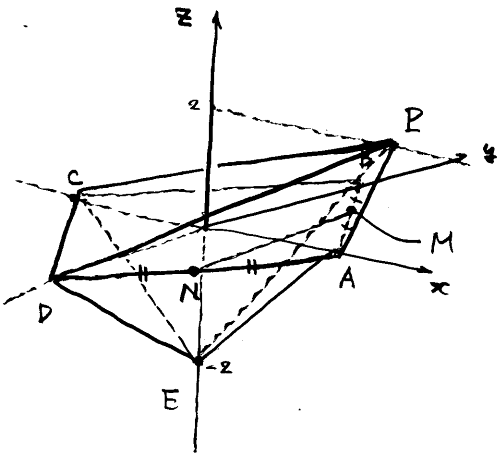
$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{\frac{81}{64}}=\dfrac{64}{81}$

$f(1)=\dfrac{2}{3}$

よって

$Max=\dfrac{64}{81}$, $min=\dfrac{3}{4}$

第3問



(1) $M(1,1,0)$, $N(1,-1,0)$ であり.

$\alpha \parallel \overrightarrow{AE}$ を満たす.

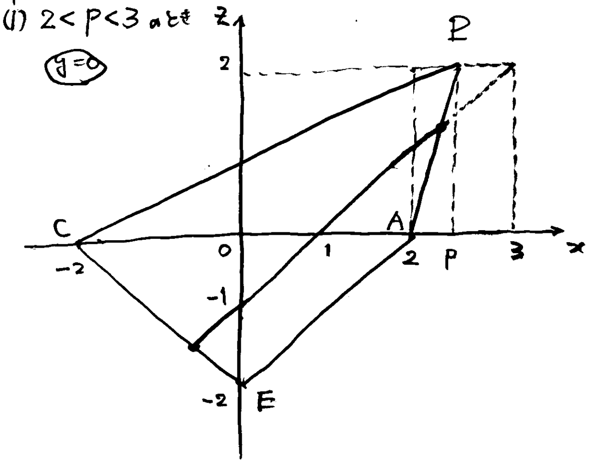
(ここで
$$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}$$
$$= (-2,0,0) + (0,0,-2)$$
$$= (-2,0,-2)$$
)

平面αは 線分MNの中点 $L(1,0,0)$

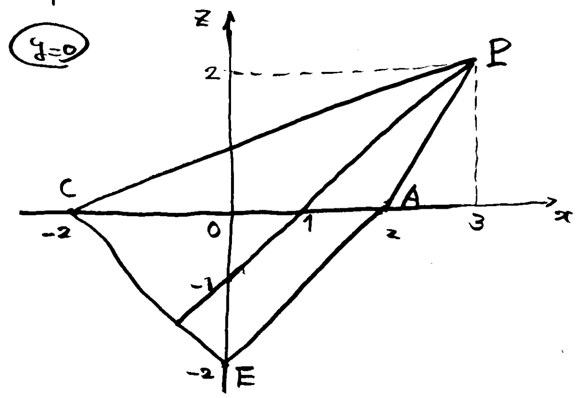
を通るので

平面α: $z = x - 1$ ——— ①

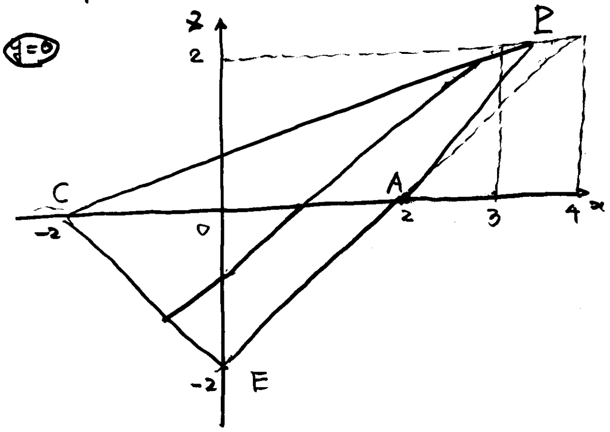
(i) $2<p<3$ のとき



(ii) $p=3$ のとき



(iii) $3<p<4$ のとき



(2)

平面$\alpha \parallel \overrightarrow{AE}$ かつ 平面αは 2点M,Nを通るので.

平面αに関して, 2点A,Eは同じ側にあり.

3点B,C,Dはそれと逆側にある.

よって 平面αは AB(M), AD(N), BE, DE, CE

と交点をもつ.

(1)で

(i) $2<p<3$ のとき.

PAと交点をもつので

切り口は 六角形

(ii) $p=3$ のとき.

点Pは平面α上にあるので.

切り口は 六角形

(iii) $3<p<4$ のとき

PB, PC, PD と交点をもつので

切り口は 八角形

(i)〜(iii) より.

$\underline{\underline{3<p<4}}$

(3)

$y \geqq 0$, $z \geqq 0$ で考えるとよいので

平面αとPB, PC, AB, ACの交点 について

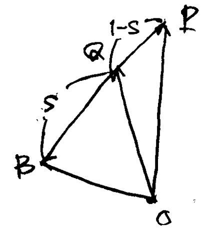
考えるとよく.

それぞれ Q, R, M, S とおく.

$M(1,1,0)$ であり.

点Sは線分MNの中点なので

$S(1,0,0)$.



$$\overrightarrow{OQ} = \frac{(1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OP}}{s+(1-s)}$$

$$= (1-s)(0,2,0) + s(p,0,2)$$

$$= (ps,\ 2-2s,\ 2s)$$

① より

$$2s = ps - 1$$

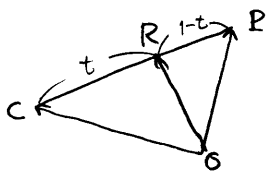
$$(p-2)s = 1$$

$p \neq 2$ より

$$s = \frac{1}{p-2}$$

よって

$$\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{p}{p-2},\ \frac{2p-6}{p-2},\ \frac{2}{p-2}\right)$$



$$\overrightarrow{OR} = \frac{(1-t)\overrightarrow{OC} + t\,\overrightarrow{OP}}{t+(1-t)}$$

$$= (1-t)(-2,0,0) + t(p,0,2)$$

$$= (2t-2+pt,\ 0,\ 2t)$$

① より

$$2t = 2t-2+pt-1$$

$$pt = 3$$

$p \neq 0$ より

$$t = \frac{3}{p}$$

よって

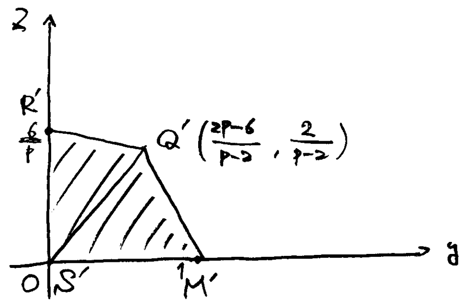
$$\overrightarrow{OR} = \left(\frac{6+p}{p},\ 0,\ \frac{6}{p}\right)$$

4点 Q, R, M, S を yz 平面に正射影した点をそれぞれ Q', R', M', S' とおくと

$$Q'\left(\frac{2p-6}{p-2},\ \frac{2}{p-2}\right),\ R'\left(0,\ \frac{6}{p}\right),$$

$$M'(1,0),\ S'(0,0)$$

であり.



求める領域は図の斜線部であり.
その面積 S は

$$S = S(\triangle Q'R'S') + S(\triangle M'Q'S')$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{2p-6}{p-2} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{p-2}$$

$$= \frac{6p-18+p}{p(p-2)}$$

$$= \frac{7p-18}{p(p-2)}$$

第4問

(1)

$$5n^2+9=\underbrace{\overbrace{(n^2+1)}\cdot 5+4}$$

$$d_n=(5n^2+9,\ n^2+1)$$

$$=(n^2+1,\ 4)$$

mod 2 として

$$\begin{cases} n\equiv 0 \text{ のとき } & n^2+1\equiv 1 \\ n\equiv 1 \text{ のとき } & n^2+1\equiv 2 \end{cases}$$

よって

$$d_n=\begin{cases} 1 & (n\equiv 0) \\ 2 & (n\equiv 1) \end{cases}$$

(2) (証明)

(i) $d_n=1$ のとき

$$\begin{cases} n^2+1=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\cdots\cdots\cdot p_\ell^{a_\ell} \\ 5n^2+9=q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot\cdots\cdots\cdot q_m^{b_m} \end{cases}$$

(ただし、

$\forall i, j$ ($p_i\neq q_j$; p_i と q_j は素数)

$a_i, b_j\in\mathbb{Z}$ かつ $a_i\geqq 0,\ b_j\geqq 0$)

$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の2乗となるためには、

n^2+1 と $5n^2+9$ がともに平方数

であるとよい。

ここで

$$n^2+1=N^2 \quad (N\in\mathbb{Z})$$

とおくと

$$N^2-n^2=1$$

$$(N+n)(N-n)=1$$

$N+n>0$ かつ $N-n>0$ より

$$\begin{cases} N+n=1 \\ N-n=1 \end{cases}$$

よって

$$N=1,\ n=0$$

これは $n\geqq 1$ に不合理

(ii) $d_n=2$ のとき

$$\begin{cases} n^2+1=2^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3}\cdot\cdots\cdots\cdot p_\ell^{a_\ell} \\ 5n^2+9=2^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot q_3^{b_3}\cdot\cdots\cdots\cdot q_m^{b_m} \end{cases}$$

(ただし、

$\forall i, j$ ($p_i\neq q_j$; p_i と q_j は素数)

$a_i, b_j\in\mathbb{Z}$ かつ $a_i\geqq 0,\ b_j\geqq 0$

$a_1\geqq 1$, $b_1\geqq 1$

a_1 と b_1 の少なくとも一方は1)

$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の2乗となるためには

$$\begin{cases} n^2+1=2A^2 \\ 5n^2+9=2B^2 \end{cases} \quad (A, B\in\mathbb{Z})$$

辺々の差をとると

$$4n^2+8=2(B^2-A^2)$$

$$2n^2+4=B^2-A^2$$

$$2(n^2+2)=(B+A)(B-A)$$

ここで

$n\equiv 1 \pmod 2$ より

$$n^2+2\equiv 3\equiv 1$$

よって

$$2(n^2+2)\equiv 2 \pmod 4$$

一方

$$(B+A)-(B-A)=2A$$

となり

$B+A$ と $B-A$ の偶奇は一致する。

よって

$$(B+A)(B-A)\equiv\begin{cases} 0 & (\text{ともに偶数}) \\ \pm 1 & (\text{ともに奇数}) \end{cases}$$

これは

$2(n^2+2)=(B+A)(B-A)$ に不合理

(i), (ii) より

$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の2乗とならない。 ■

第5問

(1) (証明)

$f(x) = x^{2n-1}$ とおくと.

$f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} \geqq 0$

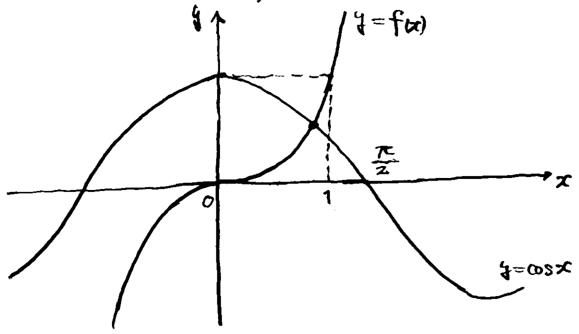
よって $f(x)$ は増加関数.

$f''(x) = (2n-1)(2n-2)x^{2n-3}$

よって $f''(x)$ と x の符号は一致し.

$x>0$ のとき $f(x)$のグラフは下に凸

$x<0$ のとき $f(x)$のグラフは上に凸



(i) $x>1$ のとき.

$f(x)>1$ かつ $\cos x \leqq 1$

となり $f(x)=\cos x$ は解をもたない.

(ii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$g(x) = x^{2n-1} - \cos x$ とおくと.

$g'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x \geqq 0$

よって $g(x)$ は増加関数

$g(0) = -1$, $g(1) = 1-\cos 1 > 0$

よって

$0<x<1$ にただ一つの実数解をもつ.

(iii) $-1 \leqq x < 0$ のとき.

$f(x)<0$ かつ $\cos x > 0$

となり $f(x)=\cos x$ は解をもたない.

(iv) $x<-1$ のとき.

$f(x)<-1$ かつ $-1 \leqq \cos x \leqq 1$

となり $f(x)=\cos x$ は解をもたない.

(i) ~ (iv) より,

$x^{2n-1} = \cos x$

は $0<x<1$ にただ一つの実数解 a_n をもつ.

■

(2) (証明)

(1) より

$0<a_n<1$.

であり. $0<x<1$ で $\cos x$ は減少関数なので

$\cos a_n > \cos 1$. ■

(3)

a_n は $x^{2n-1} = \cos x$ の解なので

$a_n^{2n-1} = \cos a_n$ ——— ①

を満たす.

(2) で

$\cos 1 < \cos a_n < 1$ より;

$\cos 1 < a_n^{2n-1} < 1$

辺々を $\dfrac{1}{2n-1}$ 乗すると.

$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = (\cos 1)^0 = 1$.

なので, ハサミウチの原理により.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

つまり $\underline{\underline{a = 1}}$

① より.

$a_n^{2n} = a_n \cos a_n$

両辺の平方根をとると

$a_n^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cos a_n}$

$= \sqrt{1 \cdot \cos 1}$.

よって $\underline{\underline{b = \sqrt{\cos 1}}}$

$$\frac{a_n^{\,n}-k}{a_n-a}=\frac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}=c_n$$ とおくと.

ここで

$h(x)=\sqrt{x\cos x}$ とおくと

$$h'(x)=\frac{\cos x-x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$$

$$c_n=\frac{h(a_n)-h(1)}{a_n-1}$$

$h(x)$ は 閉区間 $[a_n, 1]$ で連続

開区間 $(a_n, 1)$ で微分可能

なので、平均値の Th より

$$\frac{h(a_n)-h(1)}{a_n-1}=h'(d_n) \text{ かつ } a_n<d_n<1.$$

なる d が存在する.

$\lim_{n\to\infty} a_n=1$ なので

ハサミウチの原理 より

$\lim_{n\to\infty} d_n=1$

$$\lim_{n\to\infty} h'(d_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos d_n-d_n\sin d_n}{2\sqrt{d_n\cos d_n}}$$

$$=\frac{\cos 1-1\sin 1}{2\sqrt{1\cos 1}}$$

$$=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$$

よって

$$c=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$$

第6問

(1) (証明)

条件2 で $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は

実数係数の4次方程式の解なので

[1] 4つとも実数

[2] 4つとも虚数

[3] 2つ実数で2つ虚数

のいずれかである.

[1] は条件3より起こりえない.

[2] のとき

α と β, γ と δ の対称性から

$\underbrace{(\alpha=\overline{\gamma}\ \text{かつ}\ \beta=\overline{\delta})}_{(i)}$ or $\underbrace{(\alpha=\overline{\beta}\ \text{かつ}\ \gamma=\overline{\delta})}_{(ii)}$

のいずれかである.

(i) のとき

$\alpha\beta+\gamma\delta=\overline{\gamma}\overline{\delta}+\gamma\delta\in\mathbb{R}$

となり 条件3に反する.

(ii) のとき

$\alpha\beta+\gamma\delta=\overline{\beta}\beta+\overline{\delta}\delta\in\mathbb{R}$

となり 条件3に反する.

よって [3] の場合に決定される. ■

(2)

α と β, γ と δ の対称性から

$\underbrace{(\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \text{かつ}\ \gamma=\overline{\delta})}_{(i)}$ or $\underbrace{(\alpha,\gamma\in\mathbb{R}\ \text{かつ}\ \beta=\overline{\delta})}_{(ii)}$

のいずれかである.

(i) のとき

$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\overline{\delta}\delta\in\mathbb{R}$

となり, 条件3に反する.

(ii) のとき

$\alpha=p,\ \gamma=q,\ \beta=c+di,\ \delta=c-di$

$(p,q,c,d\in\mathbb{R})$

とおくと

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\gamma\delta&=p(c+di)+q(c-di)\\&=(pc+qc)+(pd-qd)i\\&=(p+q)c+(p-q)di\end{aligned}$$

条件3より

$(p+q)c=0$ かつ $(p-q)d\neq0$

よって $p\neq q$, $d\neq0$ の条件のもとで

$p+q=0$ or $c=0$

(ア) $p+q=0$ のとき $q=-p$

$\alpha=p,\ \beta=c+di,\ \gamma=-p,\ \delta=c-di$

ここで

$$\begin{aligned}&z^4-2z^3-2az+b\\&=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)\end{aligned}$$ より

$$(*)\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\\\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=0\\\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=2a\\\alpha\beta\gamma\delta=b\end{cases}$$

これを整理して

$$\begin{cases}c=1\\c^2+d^2-p^2=0\\a=-p^2c\\b=-p^2(c^2+d^2)\end{cases}\iff\begin{cases}c=1\\p^2=1+d^2\\a=-p^2\\b=-p^2(1+d^2)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a=-p^2\\b=-p^4\\c=1\\d=\pm\sqrt{p^2-1}\\q=-p\end{cases}$$

よって $b=-a^2$

(イ) $c=0$ のとき

$(*)$ は

$$\begin{cases}p+q=2\\pq+d^2=0\\(p+q)d^2=2a\\pqd^2=b\end{cases}\iff\begin{cases}p+q=2\\d^2=-pq\\a=d^2\\b=pqd^2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}a=d^2\\b=-d^4\\c=0\\p=1\pm\sqrt{1+d^2}\\q=1\mp\sqrt{1+d^2}\end{cases}$$ (複号同順)

よって $b=-a^2$

以上により

$b=-a^2$

(3)

(2) と同様 (ア), (イ) で分けて考える.

(ア) $p+q=0$ のとき

$a=-p^2$, $b=-p^4$, $c=1$, $d=\pm\sqrt{p^2-1}$, $q=-p$

つまり

$\alpha=-p$, $\beta=1\pm\sqrt{p^2-1}\,i$ $(p<-1, 1<p)$

より

$\alpha+\beta=-p+1\pm\sqrt{p^2-1}\,i$ $(p<-1, 1<p)$

ここで

$\alpha+\beta=X+Yi$ とおくと

$$\begin{cases} X=-p+1 & \text{——①} \\ Y=\pm\sqrt{p^2-1} & \text{——②} \end{cases}$$

① より

$p=-X+1$

(このとき

$p<-1$, $1<p$ より

$-X+1<-1$, $1<-X+1$

$X<0$, $2<X$)

② に代入して整理すると

$(X-1)^2-Y^2=1$ $(X<0, 2<X)$

(イ) $c=0$ のとき

$a=d^2$, $b=-d^4$, $p=1\pm\sqrt{1+d^2}$, $q=1\mp\sqrt{1+d^2}$

(複号同順)

つまり

$\alpha=1\pm\sqrt{1+d^2}$, $\beta=di$ $(d\neq0)$

より

$\alpha+\beta=(1\pm\sqrt{1+d^2})+di$ $(d\neq0)$

ここで

$\alpha+\beta=X+Yi$ とおくと

$$\begin{cases} X=1\pm\sqrt{1+d^2} \\ Y=d \end{cases}$$

d を消去して整理すると

$(X-1)^2-Y^2=1$ $(Y\neq0)$

(ア), (イ) より

求める曲線は下図